Министерство науки и образования РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«Казанский государственный энергетический университет»

Кафедра «ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ»

Отчет по лабораторной работе №9

Решение задач математического программирования

«Теория систем и системный анализ»

**Исполнитель**: Соловьёв Леонид

**Группа**: ПИ-1-22

# Вариант: № 17

**Проверил:** доц. Абдулмянов Т.Р.

# Казань 2024

## **КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ**

В том случае если задачу оптимизации можно свести к задаче с двумя переменными, то можно воспользоваться методом решения, который применим как в случае линейной, так и нелинейной оптимизации. Этот метод называется *методом геометрической оптимизации*.

Из теорем линейного программирования (ЛП) можно сделать следующие выводы.

Непустое множество планов (решений) основной задачи ЛП образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т.е. для одного из опорных планов) значение ЦФ является максимальным (при условии, что целевая функция (ЦФ) ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой ЦФ принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных. В этом случае ЦФ имеет следующий вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *F* = *c*1*x*1 + *c*2*x*2 | (3.1) |

при условиях

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2) |
|  |  | (3.3) |

Каждое из неравенств (3.2), (3.3) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми



 и 

В том случае, если система неравенств (3.2), (3.3) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений (ОДР) задачи (3.1) – (3.3) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (термин «многогранник решений» обычно употребляется, если *n* > 3). Стороны этого многоугольника определяются прямыми, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача ЛП состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой ЦФ *F* принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем ЦФ ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений ЦФ принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня

*c*1*x*1 + *c*2*x*2 = *h*,

где *h* – некоторая постоянная, проходящая через многоугольник решений, и будем продвигать ее в направлении вектора *C* = (*c*1, *c*2) до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план (решение) задачи.

Таким образом, нахождение решения задачи ЛП (3.1) – (3.3) на основе ее геометрической интерпретации состоит из двух этапов.

На первом этапе, исходя из системы ограничений определяют область допустимых решений (ОДР).

1) Строят прямые, уравнения которых получают в результате замены в ограничениях (3.2) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2) Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3) Тем самым определяется ОДР.

На втором этапе определяется оптимальное значение целевой функции.

4) Строят вектор градиента *C* = (*c*1, *c*2), указывающий направление наискорейшего роста целевой функции в нашем случае.

5) Строят прямую *c*1*x*1 + *c*2*x*2 = *h* (график ЦФ), проходящую через ОДР.

6) Передвигают прямую *c*1*x*1 + *c*2*x*2 = *h* в направлении вектора *C* до последнего касания ОДР. В результате находят точку (точки), в которой ЦФ принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7) Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение ЦФ в этой точке.

В случае необходимости нахождения минимума следует график прямой *c*1*x*1 + *c*2*x*2 = *h* перемещать в противоположную сторону, сторону антиградиента.

В общем виде задача НЛО состоит в определении максимального (минимального) значения функции

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.4) |

при условии, что ее переменные удовлетворяют соотношениям

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.5) |
|  |  |

где  и  – некоторые известные функции  переменных, а  – заданные числа.

Здесь имеется в виду, что в результате решения задачи будет определена точка , координаты которой удовлетворяют соотношениям (7.5) и такая, что для всякой другой точки , удовлетворяющей условиям (7.5), выполняется неравенство  .

Если  и  – линейные функции, то задача (7.4), (7.5) является задачей ЛП.

Соотношения (7.5) образуют систему ограничений и включают в себя условия неотрицательности переменных, если такие условия имеются. Условия неотрицательности переменных могут быть заданы и непосредственно.

В евклидовом пространстве  система ограничений (7.5) определяет ОДР задачи (ОДРЗ). В отличие от задачи ЛП она не всегда является выпуклой.

Если определена ОДР, то нахождение решения задачи (7.4), (7.5) сводится к определению такой точки этой области, через которую проходит гиперповерхность (ГП) наивысшего (ГПНвысУ) (наинизшего) уровня (ГПНнизУ): . Указанная точка может находится как на границе ОДР, так и внутри нее.

Процесс нахождения решения задачи НЛО (7.4), (7.5) с использованием ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1) Находят ОДРЗ, определяемую соотношениями (7.5) (если она пуста, то задача не имеет решения).

2) Строят ГП .

3) Определяют ГПНвысУ (ГПНнизУ) или устанавливают неразрешимость задачи из-за неограниченности функции (7.4) сверху (снизу) на множестве ДР.

4) Находят точку ОДР, через которую проходит ГПНвысУ (ГПНнизУ), и определяют в ней значения функции (7.4).



